الفضاءات المترية والفضاءات الطبولوجية:

تعريف: إذا كانت E مجموعة ما، فإن المسافة على E هي كل دالة حقيقية غير سالبة معرفة على $E \times E$

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \; ; \; (x, y) \longrightarrow d(x, y)$$

وتحقق الشروط التالية:

1) أياً كان x و y من E فإنه: $d(x,y) = 0 \iff x = y$

2) أياً كان x و y من E فإنه: $d(x,y) = d(y,x)$

3) أياً كان x و y و z من E فإنه: $d(x,z) \leq d(x,z) + d(y,z)$

ندعو الشرط (3) عادةً بمتراجحة مثلث

كما ندعو كل ثنائية (E, d) مؤلفة من مجموعة E ومن مسافة d على E فضاءً مترياً ويمكن أن نعرف أكثر من مسافة واحدة على مجموعة ما.

تعريف:

إذا كانت d_1 و d_2 مسافتين على المجموعة E نفسها، فإننا نقول أنهما متكافئتان إذا وجد عددان حقيقيان $\alpha \geq 0$ و $\beta \geq 0$ بحيث أنه:

$$\alpha\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta\, d_1(x,y)$$

وذلك أياً كان x و y من E.

أمثلة:

1) الدالة: $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \; ; \; (x,y) \longrightarrow d(x,y) = |y - x|$

تعرف على $\mathbb{R}$ المسافة المألوفة

2) إذا كانت $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ نقطتين من $\mathbb{R}^n$

فيمكن التحقق من أن الدوال:

$$d_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ \; , \; (x, y) \longrightarrow d_0(x,y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i|$$

$$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ ; (x,y) \longmapsto d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|$$

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ , (x,y) \longmapsto d_2(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

نعرف على $\mathbb{R}^n$ ثلاث مسافات متكافئة ، ندعو d_2 عادة المسافة الإقليدية

3) إذا وضعنا من أجل أي دالتين f و g من $B(X,\mathbb{R})$ [حيث $B(X,\mathbb{R})$ مجموعة الدوال الحقيقية المعرفة والمحدودة على X] .

$$d(f,g) \longrightarrow \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

فإن d تعرف مسافة على $B(X,\mathbb{R})$.

جداء ديكارتي

4) إذا كانت $(E_1,d_1),(E_2,d_2), \ldots ,(E_n,d_n)$ فضاءات مترية ووضعنا $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ وكان $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ عنصرين من E فإن الدالة:

$$d' : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+ ; (x,y) \longrightarrow d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$$

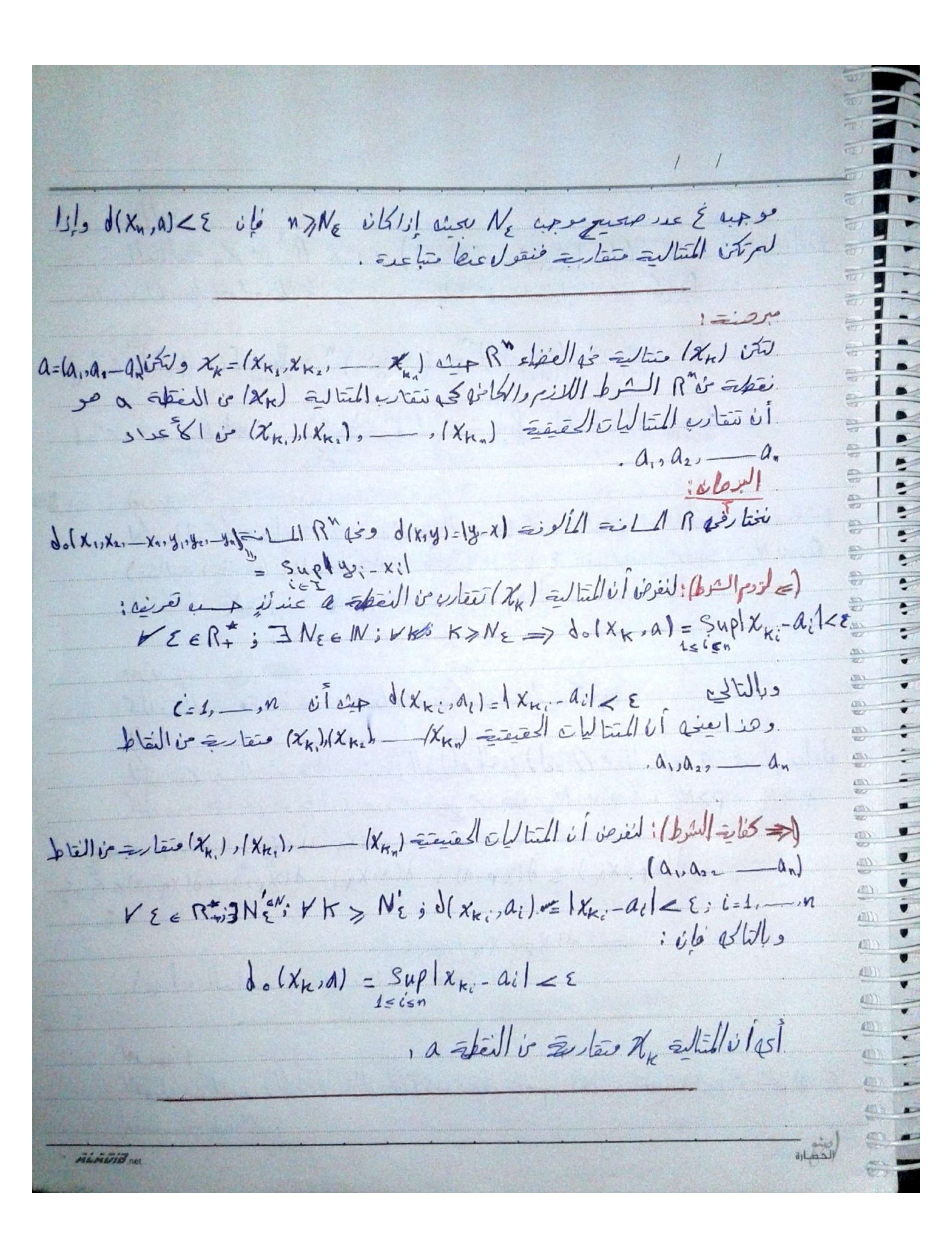
تعرف مسافة على E [وهي الجداء الديكارتي].

تعريف:

ليكن (E,d) فضاء متريا و a نقطة من E و r عددا حقيقيا موجبا. نقول عن المجموعة $B(a,r) = \{x \in E ; d(x,a) < r\}$ أنها كرة مفتوحة في E ونقول عن المجموعة $\bar{B}(a,r) = \{x \in E ; d(x,a) \leq r\}$ أنها كرة مغلقة في E ونقول عن مجموعة جزئية S من E أنها محدودة إذا وجدت كرة مفتوحة $B(a,r)$ بحيث يكون $S \subseteq B(a,r)$

تعريف:

ليكن (E,d) فضاء متريا و (x_n) متتالية في E (المتتالية في E هي كل تطبيق منطلقه $\mathbb{N}$ [طبيعية] ومستقره E حيث $n \longrightarrow x_n$) أنها متقاربة من النقطة a في E (أو تسعى إلى النقطة a) ونكتب نهاية x_n : $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ إذا قابل كل عدد حقيقي



/ /

موجبة ε عدد صحيح موجب N_ε بحيث إذا كان $n \geq N_\varepsilon$ فإن $d(x_n, a) < \varepsilon$ وإذا لم تكن المتتالية متقاربة فنقول عنها متباعدة.

مبرهنة:

لتكن (x_k) متتالية في الفضاء R^n حيث $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n})$ ولتكن $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ نقطة من R^n الشرط اللازم والكافي كي تتقارب المتتالية (x_k) من النقطة a هو أن تتقارب المتتاليات الحقيقية $(x_{k_1}), (x_{k_2}), \dots, (x_{k_n})$ من الأعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$.

البرهان:

نختار في R المسافة المألوفة $d(x,y) = |y - x|$ وفي R^n المسافة $d_0(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sup_{i \in I} |y_i - x_i|$

(⇐ لزوم الشرط): لنفرض أن المتتالية (x_k) تتقارب من النقطة a عندئذٍ حسب تعريف:

$$\forall \varepsilon \in R_+^* ; \exists N_\varepsilon \in N ; \forall k \geq N_\varepsilon \Rightarrow d_0(x_k, a) = \sup_{1 \le i \le n} |x_{k_i} - a_i| < \varepsilon$$

وبالتالي $d(x_{k_i}, a_i) = |x_{k_i} - a_i| < \varepsilon$ حيث أن $i = 1, \dots, n$

وهذا يعني أن المتتاليات الحقيقية $(x_{k_1}), (x_{k_2}), \dots, (x_{k_n})$ متقاربة من النقاط $a_1, a_2, \dots, a_n$.

(⇒ كفاية الشرط): لنفرض أن المتتاليات الحقيقية $(x_{k_1}), (x_{k_2}), \dots, (x_{k_n})$ متقاربة من النقاط $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$\forall \varepsilon \in R_+^* ; \exists N'_\varepsilon \in N ; \forall k \geq N'_\varepsilon ; d(x_{k_i}, a_i) = |x_{k_i} - a_i| < \varepsilon ; i = 1, \dots, n$$

وبالتالي فإن:

$$d_0(x_k, a) = \sup_{1 \le i \le n} |x_{k_i} - a_i| < \varepsilon$$

أي أن المتتالية x_k متقاربة من النقطة a.

/ /

مثال:

المتالية x_n من R^3 حيث: $x_n = \left(\frac{1}{n}, \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, n(e^{\frac{1}{n}}-1)\right)$ متقاربة من النقطة $(0, \frac{1}{e}, 1)$ وذلك لأن:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0;$ ~~$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$~~

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-1}\right)^{-n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \overset{\text{لوبيتال}}{=} \frac{-\frac{1}{n^2} \cdot e^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

تعريف:

ليكن (E, d) فضاء متريًا و x_n متتالية في E ; نقول عن (x_n) أنها متتالية كوشي (متتالية أساسية) إذا قابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد صحيح موجب N_ε بحيث إذا كان $p \geq N_\varepsilon$, $q \geq N_\varepsilon$ فإن $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

مبرهنة:

كل متتالية متقاربة في فضاء متري تكون متتالية كوشي.

البرهان:

لتكن x_n متتالية متقاربة في الفضاء المتري (E, d) من النقطة a عندئذ يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد صحيح موجب N_ε بحيث يكون $p \geq N_\varepsilon$, $q \geq N_\varepsilon$

$d(x_q, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, $d(x_p, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, a) + d(a, x_q) = d(x_p, a) + d(x_q, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

أي أن المتتالية x_n هي متتالية كوشي.

تعريف:

نقول عن الفضاء المتري (E, d) أنه فضاء تام إذا كانت كل متتالية كوشي في E متقاربة في E .

نتائج:

1) الفضاءان R و R^n هما فضاءان تامان.

2) الفضاء المتري (Q,d) حيث Q مجموعة الأعداد العادية و d دالة المسافة المعرفة بالشكل $d(x,y)=|y-x|$ ليس تاماً وذلك لأن المتتالية $(x_n)=(1+\frac{1}{n})^n$ في Q ليست متقاربة في Q (لأن نهاية x_n لما n يسعى ∞ يساوي $e \notin Q$)

$\frac{3م}{15}$

تعريف: لتكن X مجموعة ما و ح أسرة مجموعات جزئية من X نقول عن ح أنها طبولوجيا على X إذا حققت الشروط التالية:

1- كل اجتماع لعناصر من ح هو عنصر من ح.

2- كل تقاطع منته لعناصر من ح هو عنصر من ح.

3- المجموعتان X و φ تنتميان الى ح.

★ ندعو كل ثنائية $(X, ح)$ مؤلفة من مجموعة ما X ومن طبولوجيا ح على X فضاء طبولوجياً.

وتدعى عناصر ح مجموعة مفتوحة، ونقول عن المجموعة F من X أنها مغلقة إذا كانت $X-F$ مفتوحة.

ملاحظة:

ليكن (E,d) فضاء مترياً و ح مجموعة جميع الأجزاء U من E التي تحقق من أجلها: $\forall x \in U, \exists \varepsilon \in R^*_+ , B(x,\varepsilon) \subseteq U$

ح كرة مفتوحة

عندئذٍ تكون ح طبولوجيا على E.

البرهان: نلاحظ أن E و φ يحققان الشرط ~~[illegible]~~ المذكور سابقاً وبالتالي فهما ينتميان إلى ح.

/ /

لتكن $\{U_i\}_{i\in I}$ أسرة من عناصر τ ولنفرض $U=\bigcup_{i\in I} U_i$ ولنفرض أن $x\in U$

$\Leftarrow$ يوجد $j\in I$ بحيث يكون $x\in U_j$ وبالتالي يوجد عدد حقيقي موجب ε بحيث

يكون $B(x,\varepsilon)\subseteq U_j$ $\Leftarrow$ $B(x,\varepsilon)\subseteq U$ ومنه فإن $U\in\tau$.

لتكن $U_1, U_2, \ldots, U_n$ عناصر من τ ولنفرض أنه $\mathcal{U}=U_1\cap U_2\cap\ldots\cap U_n$ ولنفرض أن

$x\in\mathcal{U}$ فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث أن $1\le k\le n$ عدد حقيقي موجب ε_k

من أجل كل

بحيث يكون $B(x_k,\varepsilon_k)\subseteq U_k$ فإذا وضعنا $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\}$ فإن $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ بحيث

~~$B(x,\varepsilon)$ ...~~

$B(x,\varepsilon)=B(x,\varepsilon_1)\cap B(x,\varepsilon_2)\ldots\cap B(x,\varepsilon_n)\subseteq\mathcal{U}\Rightarrow\mathcal{U}\in\tau$

نتيجة: كل فضاء متري هو فضاء طبولوجي.

تعاريف:

1- إذا كانت V مجموعة جزئية من الفضاء الطبولوجي (X,τ)، و a نقطة من V فإننا نسمي V جوار للنقطة a إذا وجدت مجموعة مفتوحة U بحيث يكون

$a\in U\subseteq V$

2- نقول عن النقطة a أنها نقطة داخلية للمجموعة A إذا كانت A جوار للنقطة a، نسمي مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة A بداخلية A ونرمز لها بـ $\mathring{A}$ أو $\text{int}A$

3- نقول عن نقطة a أنها نقطة لاصقة بالمجموعة A إذا تقاطع كل جوار للنقطة a مع A وندعو مجموعة النقاط اللاصقة بالمجموعة A بلصاقة A ونرمز لها بالرمز $\bar{A}$

وتكون المجموعة A مغلقة إذا وفقط إذا كانت $A=\bar{A}$

4- نقول عن النقطة a أنها نقطة جبهية للمجموعة A إذا تقاطع كل جوار للنقطة a مع A ومتممة A وندعو النقاط الجبهية للمجموعة A بجبهية A ونرمز لها بالرمز: $Fr(A)$

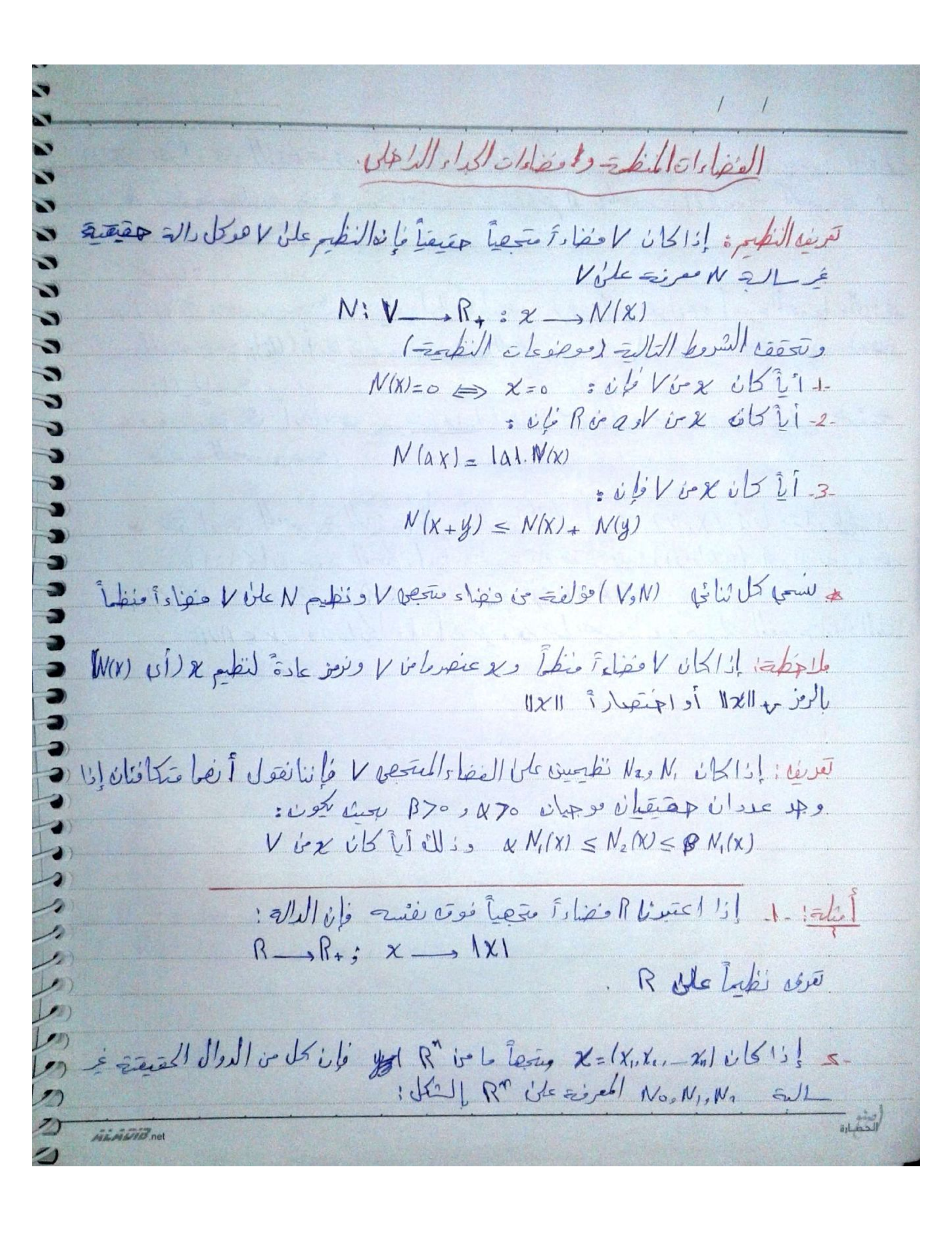
-5- نقول عن النقطة a أنها نقطة تراكم للمجموعة A إذا احتوى أي جوار للنقطة a نقطة مختلفة عن a، ندعو مجموعة نقاط تراكم A بالمجموعة المشتقة للمجموعة A ونرمز لها بالرمز A'.

تعريف:

* لتكن S مجموعة جزئية من الفضاء الطبولوجي (X, τ) ؛ نقول عن أسرة المجموعات الجزئية المفتوحة $\{U_i\}_{i \in I}$ أنها تغطية مفتوحة للمجموعة S إذا كانت ~~[illegible]~~ $S \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

* ونقول عن S أنها مجموعة متراصة إذا احتوت كل تغطية مفتوحة لـ S تغطية جزئية منتهية للمجموعة S.

* نقول عن المجموعة الجزئية Y من الفضاء الطبولوجي (X, τ) أنها مترابطة إذا وفقط إذا كان من غير الممكن إيجاد مجموعتين مفتوحتين (أو مغلقتين) A و B بحيث يكون $A \cap Y \neq \varnothing$; $B \cap Y \neq \varnothing$ $A \cap B \cap Y = \varnothing$ و $Y \subseteq A \cup B$ وهذا يكافئ أن Y و $\varnothing$ هما مجموعتان وحيدتان المفتوحتان والمغلقتان بآن واحد فيها Y.



/ /

الفضاءات المنظمة وفضاءات الجداء الداخلي

تعريف النظيم: إذا كان V فضاءً متجهياً حقيقياً فإن النظيم على V هو كل دالة حقيقية غير سالبة N معرفة على V

$$N : V \longrightarrow R_+ \ : x \longrightarrow N(x)$$

وتتحقق الشروط التالية (موضوعات النظيمة)

-1- أياً كان x من V فإن: $x=0 \iff N(x)=0$

-2- أياً كانت x من V و a من R فإن:

$$N(ax) = |a| . N(x)$$

-3- أياً كان x من V فإن:

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

* نسمي كل ثنائي (V,N) مؤلفة من فضاء متجهي V ونظيم N على V فضاءً منظماً

ملاحظة: إذا كان V فضاءً منظماً و x عنصراً من V ونرمز عادةً لنظيم x (أي $N(x)$) بالرمز $\|x\|$ أو اختصاراً $\|x\|$

تعريف: إذا كان N_1 و N_2 نظيمين على الفضاء المتجهي V فإننا نقول أنهما متكافئتان إذا وجد عددان حقيقيان موجبان $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ بحيث يكون:

$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ وذلك أياً كان x من V

أمثلة: -1- إذا اعتبرنا R فضاءً متجهياً فوق نفسه فإن الدالة:

$$R \longrightarrow R_+ \ ; \ x \longrightarrow |x|$$

تعرف نظيماً على R .

-2- إذا كان $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ متجهاً ما من R^n فإن كل من الدوال الحقيقية غير السالبة N_0, N_1, N_n المعرفة على R^n بالشكل:

/ /

$x = (1, 2, 3, 4, -5) \in R^5$

$N_0(x) = 5$

$N_1(x) = 15$

$N_2(x) = \sqrt{(1)^2+(2)^2+(3)^2+(4)^2+(-5)^2}$

مثال $N_0(x) = \sup_{1 \le i \le n} |x_i|$ $\quad N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$N_2(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

هي نظيم على R^n.

وإذا لاحظنا أن:

$N_0(x) \le N_1(x) \le \sqrt{n}\, N_2(x) \le n\, N_0(x)$

نستنتج أن N_0, N_1, N_2 متكافئة.

3- إذا وضعنا من أجل أي دالة f من الفضاء المتجه $B(X,R)$

$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$

فإننا نعرف على $B(X,R)$ نظيماً يدعى عادة" نظيم التقارب المنتظم.

نتيجة: إذا كان (V, N) فضاءاً منظماً ووضعنا من أجل أي متجهين x و y من V، $d(x,y) = N(x-y)$ فإننا نعرف على V مسافة d نقول أنها مولدة بالنظيم N، وهكذا فإن كل فضاء منظم هو فضاء متري وبالتالي فضاء طوبولوجي.

مبرهنة: ليكن V فضاءاً متجهياً و N_1 و N_2 نظيمين متكافئين على V عندئذٍ فإن المسافتين d_1 و d_2 المولدتان بالنظيمين N_1 و N_2 متكافئتان.

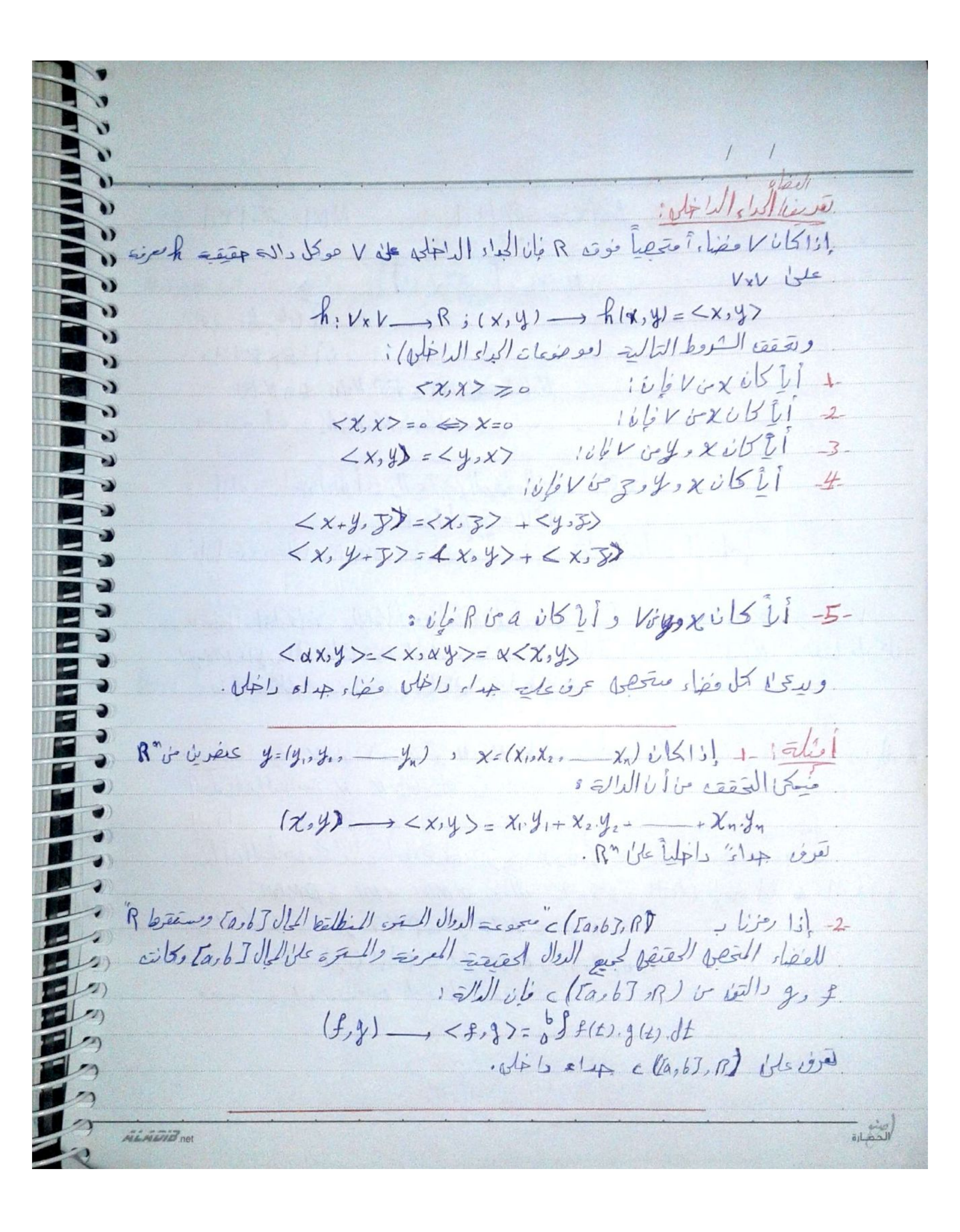
البرهان:

بما أن النظيمين متكافئان فإنه يوجد $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ عددان حقيقيان، بحيث يكون: $\alpha N_1(x) \le N_2(x) \le \beta N_1(x)$ وذلك $\forall x \in V$ وبالتالي فإنه أياً كان x و y من V يكون

$\alpha N_1(x-y) \le N_2(x-y) \le \beta N_1(x-y)$

$\alpha d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le \beta d_1(x,y)$

ومنه ينتج ان المسافتين d_1 و d_2 متكافئتان.



/ /

تعريف الجداء الداخلي: (الفضاء)

إذا كان V فضاءً متجهاً فوق R فإن الجداء الداخلي على V هو كل دالة حقيقية h معرفة على V×V

$$h: V\times V \longrightarrow R \; ; \; (x,y) \longrightarrow h(x,y) = \langle x,y\rangle$$

وتحقق الشروط التالية (موضوعات الجداء الداخلي):

1- أياً كان x من V فإن: $\langle x,x\rangle \geq 0$

2- أياً كان x من V فإن: $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$

3- أياً كان x و y من V فإن: $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

4- أياً كان x و y و z من V فإن:

$$\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$$
$$\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$$

5- أياً كان x و y من V وأياً كان α من R فإن:

$$\langle \alpha x,y\rangle = \langle x,\alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$$

ويدعى كل فضاء متجه عرف عليه جداء داخلي فضاء جداء داخلي.

أمثلة: 1- إذا كان $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ عنصرين من R^n فيمكن التحقق من أن الدالة:

$$(x,y) \longrightarrow \langle x,y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

تعرف جداءً داخلياً على R^n.

2- إذا رمزنا ب $C([a,b],R)$ مجموعة الدوال المستمرة المنطلقة من المجال $[a,b]$ ومستقرها R للفضاء المتجه الحقيقي لجميع الدوال الحقيقية المعرفة والمستمرة على المجال $[a,b]$ وكانت f و g دالتين من $C([a,b],R)$ فإن الدالة:

$$(f,g) \longrightarrow \langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt$$

تعرف على $C([a,b],R)$ جداء داخلي.

مبرهنة ١ (متباينة شوارتز).

إذا كان V فضاء جداء داخلي فعندئذٍ: $\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ وذلك أياً كان المتجهان x و y من V.

البرهان:

إذا كان $y=0$ فإن العلاقة (1) تكون صحيحة.

لنفرض $y\neq 0$ عندئذٍ نجد من أجل أي عدد حقيقي a يكون:

$$0 \le \langle x-ay, x-ay\rangle = \langle x, x-ay\rangle + \langle -ay, x-ay\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle x,-ay\rangle + \langle -ay, x\rangle + \langle -ay,-ay\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle - a\langle x,y\rangle - a\langle x,y\rangle + a^2\langle y,y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle - 2a\langle x,y\rangle + a^2\langle y,y\rangle$$

إذا وضعنا $a = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ فنجد أن:

$$0 \le \langle x,x\rangle - 2\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle^2}\langle y,y\rangle$$

$$0 \le \langle x,x\rangle - 2\frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle}$$

$$0 \le \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \overset{\times\langle y,y\rangle}{\Longrightarrow} 0 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2$$

$$\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$